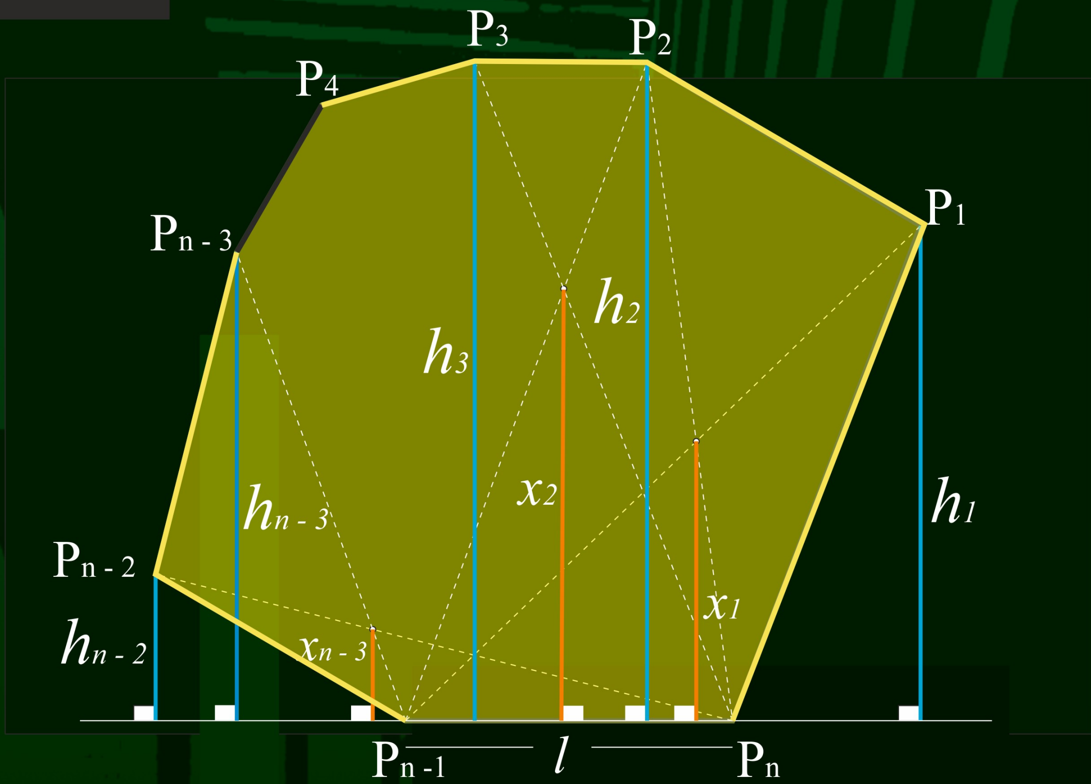
7 ÁREA DE UNA REGIÓN POLIGONAL

ÁREA



$$[P_1P_2\ldots P_n] = \frac{l}{2}\left(\sum_{i=1}^{n-3}\frac{h_i\,h_{i+1}}{x_i} - \sum_{i=2}^{n-3} h_i\right)$$

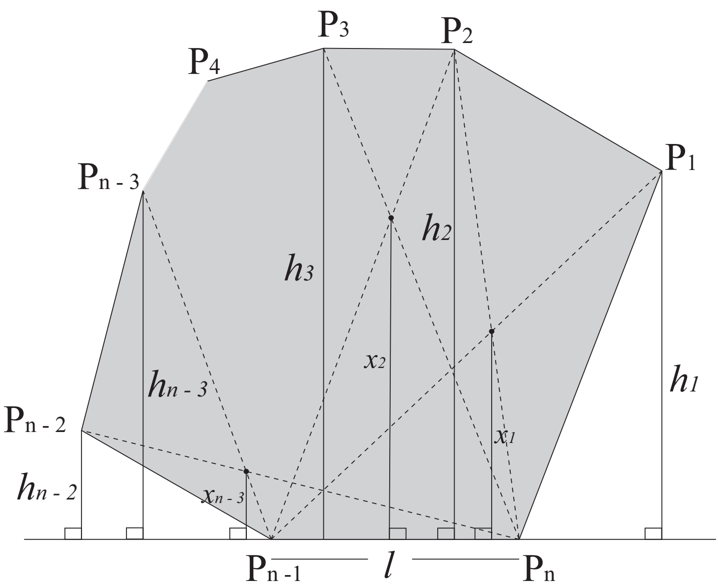
La geometría en las Olimpiadas Matemáticas

MILTON DONAIRE PEÑA

NEW CALCULATION OF THE AREA OF A POLYGON REGION

Milton F. Donaire

Índice general



$$[P_1P_2...P_n] = \frac{l}{2}(\sum_{i=1}^{n-3}\frac{h_i \cdot h_{i+1}}{x_i} - \sum_{i=2}^{n-3} h_i)$$

Introducción

El presente trabajo tiene como propósito dar a conocer dos teoremas sobre áreas de regiones cuadrangulares y finalmente encontrar el área para cualquier región poligonal.

El punto de partida para el PRIMER TEOREMA fue el estudio del área de una región trapecial como el producto de la longitud de uno de sus lados laterales con la distancia a él, desde el punto medio del otro lado lateral, la pregunta era si ese resultado podría generalizarse. Al encontrarse que dicha generalización era posible, el siguiente paso fue buscarle una demostración sencilla, de tal manera que dicho resultado pueda ser incluido en los textos de nivel medio escolar. Posteriormente se vio que el teorema era válido en todos los cuadriláteros inclusive en los cruzados, y que parte de él resultó ser un caso particular de un antiguo teorema debido a L. Anné.

En el caso del SEGUNDO TEOREMA, su especial belleza radica en que se pone al descubierto el cálculo del área de la región cuadrangular como el semi producto de uno de sus lados con un número que resultar ser una combinación adecuada entre las distancias de los vértices del cuadrilátero y el punto de intersección de sus diagonales, hacia dicho lado.

Tanto el primero como el segundo resultado permiten una generalización, pero en el caso del segundo resultado es más accesible alcanzar tal objetivo.

Milton Donaire Peña

Introduction

The purpose of this paper is to present a new theorem about areas of polygonal regions. The theorems in question that are presented, allow to calculate the area of any quadrangular region by using the lengths of some segments, which is equivalent to saying that it represents a purely geometry way of obtaining such an area, and it is precisely in this, and in its simplicity, which lies its importance.

The starting point for the FIRST THEOREM was the study of the area of a trapecial region as the product of the length of one of its lateral sides with the distance to it, from the midpoint of the other lateral side, the question was whether that result it could be generalized. Finding that such generalitation was possible, the next step was to find a simple demostration, so that this result can be included in the middle school texts. Subsequently, it was seen that the theorem was valid in all quadrilaterals even in the crusaders, and that part of this theorem is a particular case of an ancient theorem due to L. Anné.

In the case of the SECOND THEOREM, its special beauty is that the calculation of the area of the quadrangular region as the semi product of one of its sides with a number that turns to be an adequate combination between the distances of the vertices of the quadrilateral and the intersection point of its diagonals, to thar side.

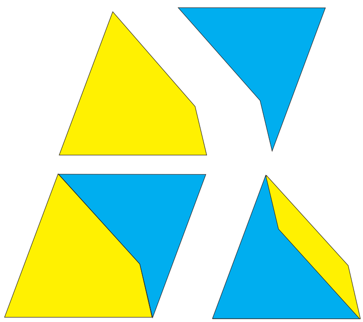
Milton Donaire Peña

Capítulo 1

LOS RESULTADOS

PRIMER TEOREMA

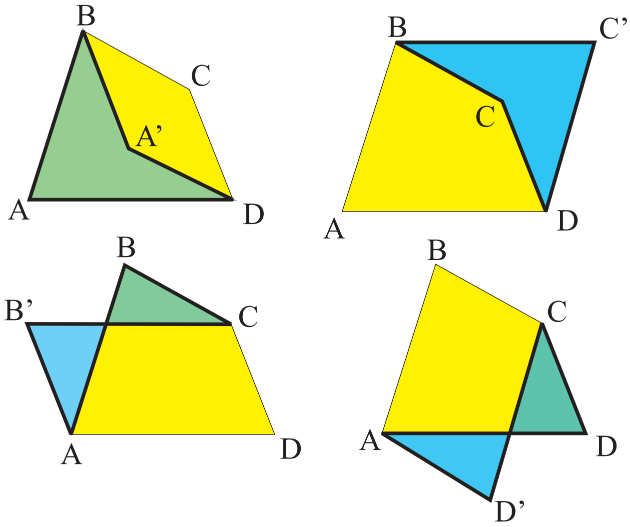
Puede ser conveniente para facilitar nuestro estudio introducir la denominación de cuadriláteros Paralelométricos.



Cuadriláteros Paralelométricos

Definición 1. *Dos cuadriláteros serán denominados paralelométricos (para este trabajo) cuando los lados de uno de ellos sean paralelos a los lados del otro y cada par de lados paralelos tengan igual longitud. Cualquiera de ellos será denominado paralelométrico del otro.*

De la definición anterior se sigue que dado un cuadrilátero ABCD, podemos encontrarle 2 cuadriláteros paralelométricos a él, como se muestra en la siguiente figura (cada uno se puede ubicar en dos posiciones al hacer que dos pares de lados consecutivos se superpongan; pares angulares superpuestos[1])

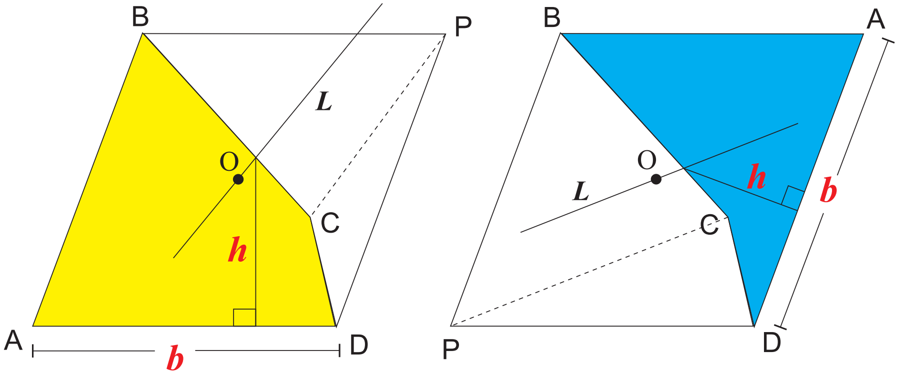


Posiciones de cuadriláteros paralelométricos con su respectivo par angular compartido

Notemos que siempre dos cuadriláteros paralelométricos tienen una de sus diagonales de igual longitud, un ángulo de igual medida y las diagonales no comunes que se determinan con los vértices no comunes de ambos cuadriláteros ($\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ y $\overline{DD'}$) resultan ser todas paralelas entre sí.

Teorema 1. *El área de Cualquier región cuadrangular es igual al producto de las longitudes de uno de sus lados (b) con la perpendicular (h) trazada hacia dicho lado, desde el punto de intersección del lado opuesto a él, con la recta que pasa por el centro del paralelogramo que forma con su cuadrilátero paralelométrico, y que es paralela a la diagonal no común entre ellos.*

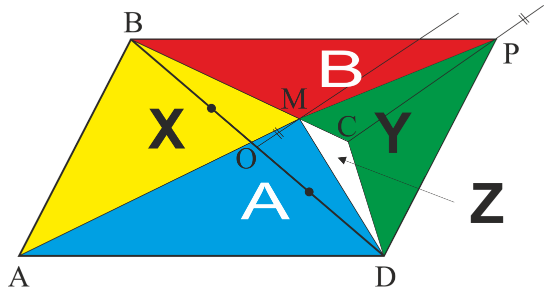
[1]Llamemos **PAR ANGULAR** a dos segmentos que comparten un extremo y no son colineales



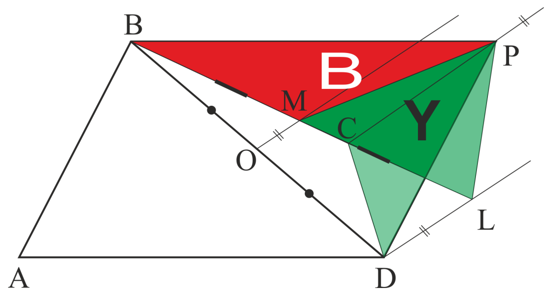
O: centro de ABCD y $L\ //\ \overline{CP}$: $[ABCD] = bh$

■ Prueba

Paso 1 : Como ABPD es un paralelogramo: **A** + **B**= **X** + **Y** + **Z**

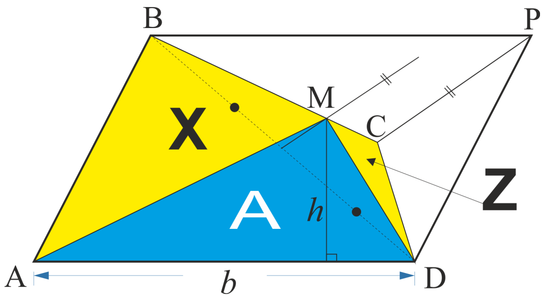


Paso 2 : Trazamos $\overline{DL}\ //\ \overline{CP}$, $\triangle BPL$: $\overline{PM}$: mediana, **B** = **Y**



Del paso 1 y 2 se sigue: **A** = **X** + **Z**

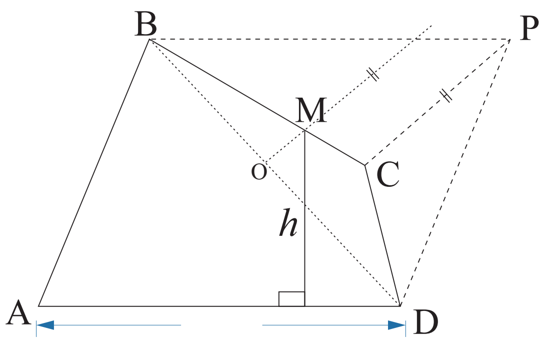
Paso 3



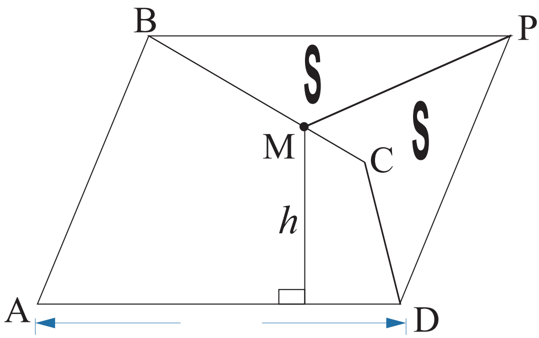
$[ABCD] = \mathbf{X} + \mathbf{A} + \mathbf{Z}$
$[ABCD] = 2\mathbf{A}$
pero $\mathbf{A} = bh$
De allí$[ABCD] = bh$ $\square$

DE DONDE TRAZAR LA PERPENDICULAR

Cabe la pregunta si existe alguna forma opcional de determinar el punto M desde el cual trazar la perpendicular que nos permite calcular el área de la región cuadrangular ABCD, pues la respuesta es afirmativa y nos la da el paso 2 de la demostración anterior

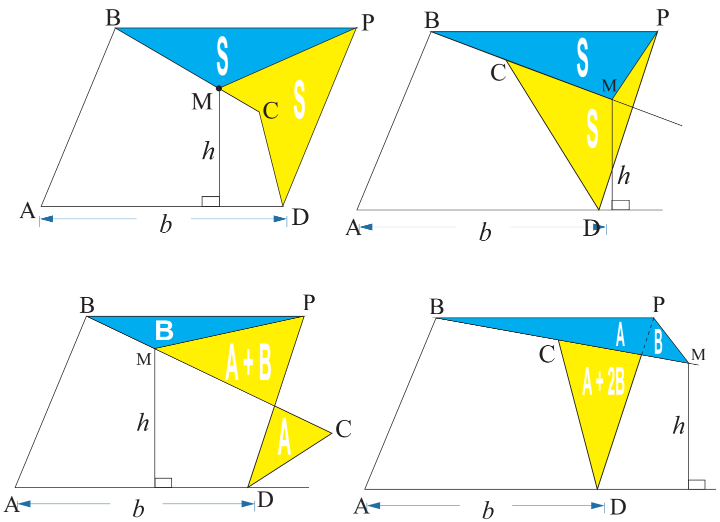


Y es que en el paso 2 de la prueba anterior se demostró que las regiones BMP y MPDC son equivalentes, lo cual nos permitirá afirmar que:



$$[\text{BMP}] = [\text{MPDC}] \Leftrightarrow [\text{ABCD}] = b \cdot h$$

Es decir para obtener la ubicación del punto M, el cual debe estar en la recta que contiene a un lado del cuadrilátero, se debe trazar un segmento en la región cuadrangular BPDC de tal forma que las regiones BMP y MPDC sean equivalente, note que si algunas de las regiones resulta ser limitada por un cuadrilátero cruzado entonces el área de dicha región se calcula como el valor absoluto de la diferencia de las áreas de sus partes triangulares que forman al cuadrilátero cruzado.



$$[\text{BMP}] = [\text{MPDC}] \Leftrightarrow [\text{ABCD}] = b \cdot h$$

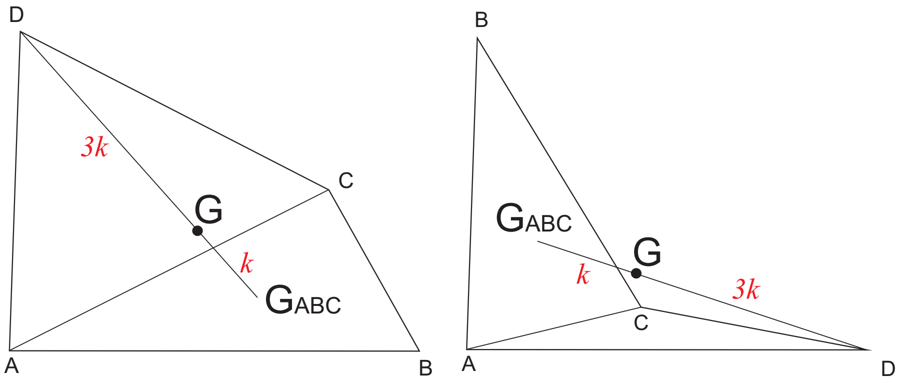
Definición 2. *Denominamos mediana de un cuadrilátero al seg-*

mento que une uno de sus vértices, con el baricentro de la región triangular determinada por los otros tres vértices del cuadrilátero.

Teorema. *En todo cuadrilátero sus medianas son concurrentes, en un punto que las divide a cada una en la razón de 3 a 1.*

Definición 3. *En todo cuadrilátero al punto de concurrencia de sus medianas le denominaremos baricentro del cuadrilátero.*

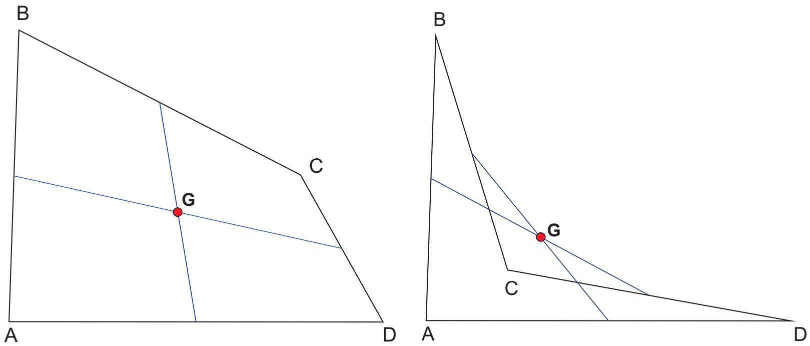
Teorema. *En todo cuadrilátero los segmentos que unen los puntos medios de sus lados opuestos, se intersecan en el baricentro del cuadrilátero.*



G: Baricentro de $ABCD$

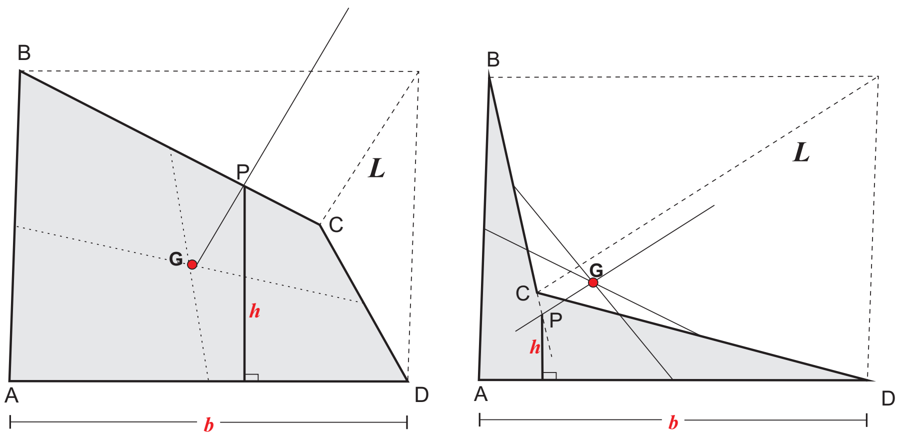
Definición 4. *En todo cuadrilátero al segmento que une los puntos medios de dos lados opuestos se le denomina Bimediana.*

Se conoce además que los segmentos que unen los puntos medios de los lados opuestos se bisecan mutuamente ya que sus extremos son los vértices del conocido paralelogramo de Varignom, cuyo centro entonces, según lo visto será el baricentro del cuadrilátero.

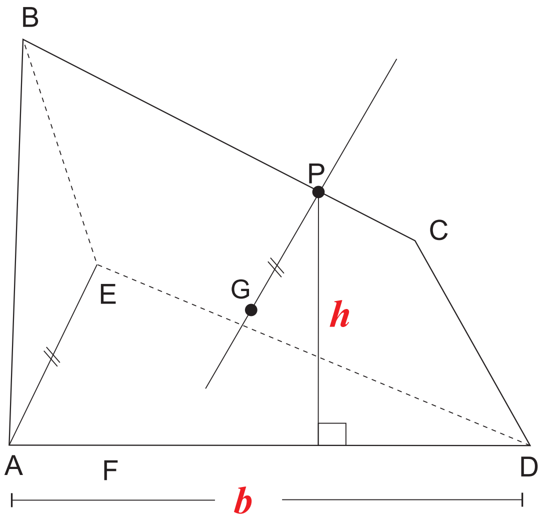


G: Baricentro del cuadrilátero

Teorema 2. *Si construimos un paralelogramo que tenga por lados, dos lados de un cuadrilátero dado. Y si por el baricentro del cuadrilátero dado, trazamos una recta* L *paralela a la recta que une el vértice del paralelogramo no contenido en el cuadrilátero, con el vértice del cuadrilátero no contenido en el paralelogramo, entonces: El área de cualquier región cuadrangular es igual al producto de las longitudes de uno de sus lados (b) con la perpendicular (h) trazada hacia dicho lado desde el punto de intersección del lado opuesto a él, con la recta que pasa por el baricentro del cuadrilátero y que es paralela a la recta* L.



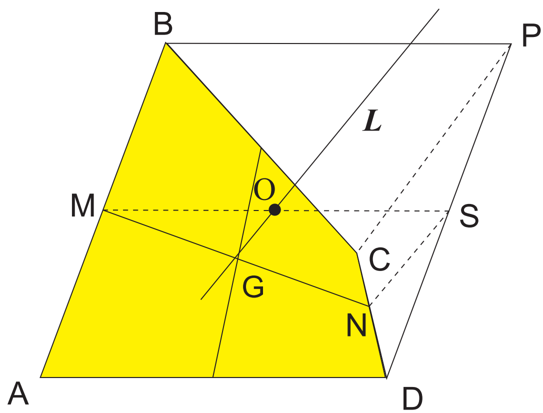
G: baricentro, entonces $[ABCD] = b \cdot h$



G: baricentro, entonces $[ABCD] = b \cdot h$

■ Prueba

Para su demostración basta ver que la recta L que pasa por G y es paralela a la recta CP, también pasa por el centro del paralelogramo, lo que reduce la prueba al teorema 1 □



G: baricentro de la región cuadrangular ABCD

VARIANTE - (Corolario - León Anné)

El teorema presentado en la sección anterior puede verse como un corolario del teorema de León Anné que presentaremos a continuación, para ello sólo debemos relacionarlo con la recta que pasa por los puntos medios de las diagonales del cuadrilátero, osea la recta de Newton. Es así que el teorema que hemos puesto al descubierto viene siendo un caso particular del teorema de León Anné pero que tiene utilidad propia, incluso demostración propia, como hemos visto, y es bastante simple (curiosamente aunque se pueda ver como un corolario de Anné, resulta que si usamos el teorema de Anné para su demostración nos complicaremos quizás un poco más de lo necesario).

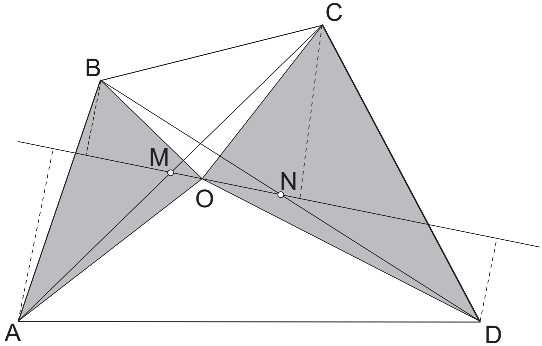
Se entiende entonces que se presenta una situación comparable al teorema de Ptolomeo válido para cuadriláteros inscritos o inscriptibles, con su caso particular de Chaddu para el triángulo equilátero, sabemos que incluso el propio teorema de Ptolomeo es un caso particular del teorema de Bretschneider. O con el teorema de Stewart y su caso particular el teorema de Apolonio o de la mediana, o del teorema de la bisectriz, cuya utilidad está más que clara para situaciones específicas.

Enunciamos entonces el teorema de Leon Anne:

TEOREMA DE LEÓN ANNE

Dado un cuadrilátero, el lugar geométrico de todos los puntos tal que la suma de las áreas de los triángulos determinados con dicho punto y dos lados opuestos es igual a la suma de las áreas de los otros dos triángulos determinados con los otros dos lados; es la línea recta que pasa por los puntos medios de las diagonales[2].

[2]Puede leerse sobre este teorema en el F. G. M. (1912) Teorema 555 Problema 1613 (pág 767), además se encuentra una generalización para cualquier polígono en el libro Inducción en la Geometría de Golovina y Yaglom (pág 70) de la editorial MIR



■ Prueba (Original)

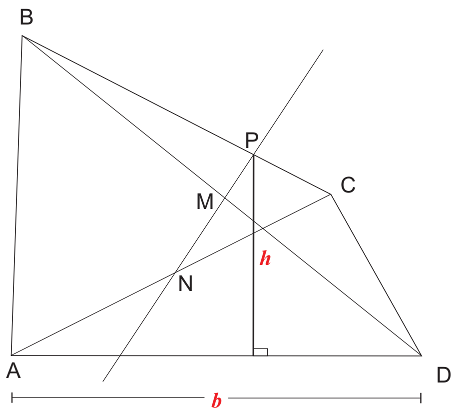
Reproducimos la prueba original de Léon Anne:

Sea MN la recta que pasa por los puntos medios de las diagonales; las perpendiculares bajadas desde los vértices del cuadrilátero sobre dicha recta son iguales dos a dos, se sigue que los triángulos con bases iguales sobre el segmento MN y con vértices en A y en C son equivalentes, lo mismo para los triángulos con vértices en B y en D. Entonces:

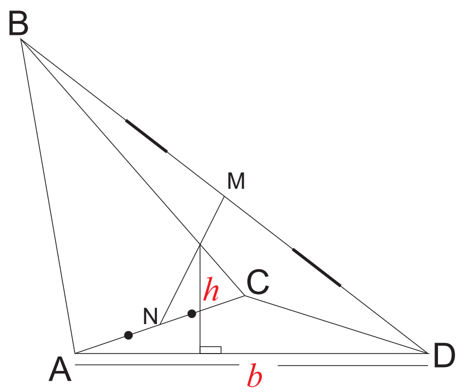
$[AOB] = [AMB] + [AOM] + [BOM]$
$[DOC] = [DMC]$ - $[COM]$ - $[DOM]$
además
$[AOM] = [COM]$ y $[DOM] = [BOM]$
luego:
$[AOB] + [DOC] = [AMB] + [DMC]$
De la misma rorma:
$[AOD] = [AMD] + [DOM]$ - $[AOM]$
$[COB] = [CMB]$ - $[BOM] + [COM]$
sumando:
$[AOD] + [COB] = [AMD] + [CMB]$
de los resultados obtenidos, queda demostrado que:
$[AOB] + [COD] = [AOD] + [COB]$ □

De lo visto anteriormente, podemos presentar nuestro Primer teorema como un caso particular del teorema anterior de Anne cuando ubicamos el punto sobre uno de los lados del cuadrilátero, sin embargo para su demostación no usaremos tal teorema, dicho esto tenemos:

Variante. *El área de Cualquier región cuadrangular es igual al producto de las longitudes de uno de sus lados (b) con la perpendicular (h) trazada hacia dicho lado, desde el punto de intersección del lado opuesto a él, con la recta que pasa por los puntos medios de las diagonales del cuadrilátero.*

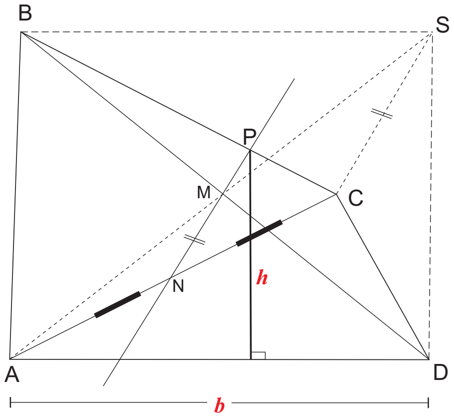


$$[ABCD] = b \cdot h$$



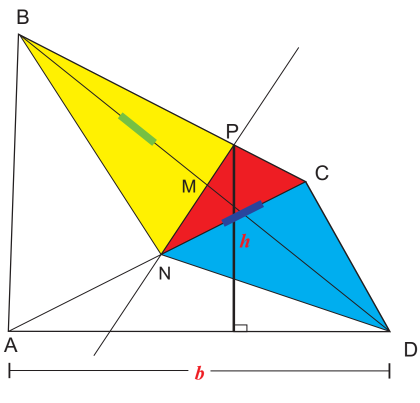
$$[ABCD] = b \cdot h$$

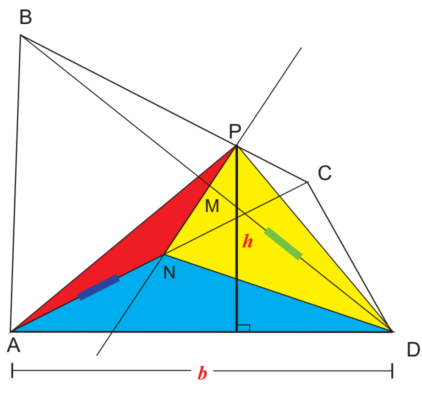
■ Prueba MÉTODO 1



Construimos el paralelogramo $ABSD$ usando su cuadrilátero complementario de $ABCD$, como M es punto medio de la diagonal BD, entonces M será el centro del paralelogramo $ABSD$. En el triángulo ACS se obtiene que la recta NM será paralela a la recta SC; es decir, al final la prueba de este teorema se reduce al teorema 1 ya demostrado. □

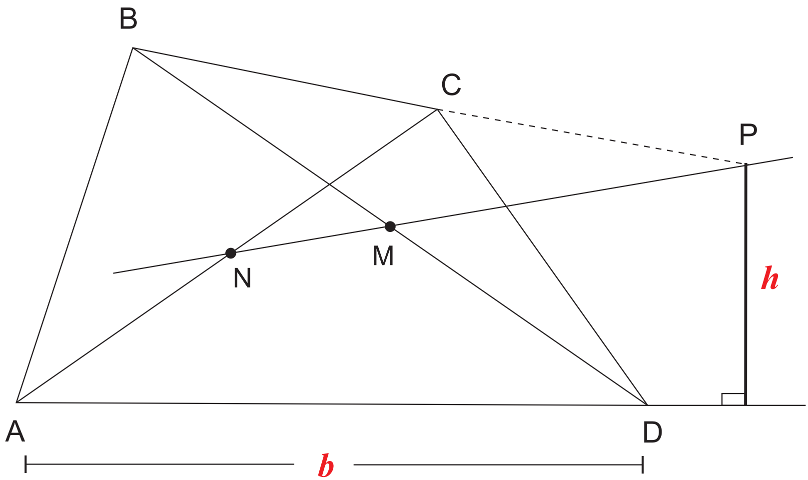
■ Prueba MÉTODO 2 (recta secante al lado)





Usando regiones equivalentes:
$[ABCD] = 2[BCDN]$
$[ABCD] = 2[APD] = bh.$ $\square$

■ Prueba (recta secante a la prolongación del lado)



$$
\begin{aligned}
[ABCD]/2 &= [BCDN] \\
&= [BNP] + [NPD] - [CPD] \\
&= [BNP] + [NCP] + [NPD] - [CPD] - [NCP] \\
&= [NPD] + [NCP] + [NPD] - [CPD] - [NCP] \\
&= [NCPD] + [NPD] - [CPD] - [NCP] \\
&= [NCD] + [CPD] + [NPD] - [CPD] - [NCP] \\
&= [AND] + [NPD] - [NCP] \\
&= [AND] + [NPD] - [ANP] \\
&= [APD] = bh/2
\end{aligned}
$$

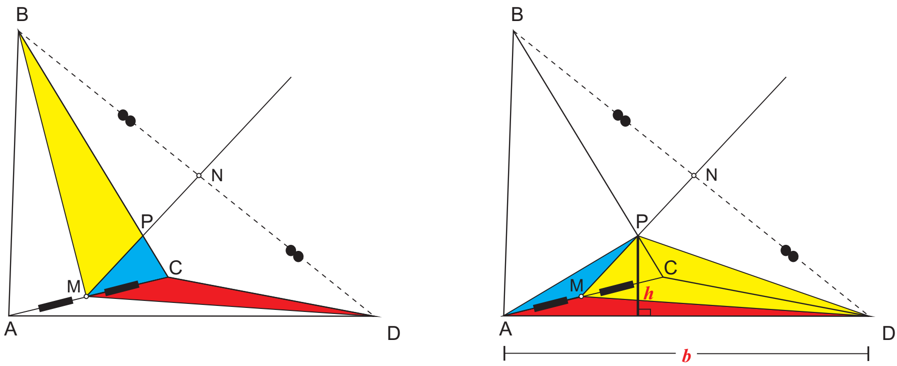
Finalmente

$$[ABCD] = bh \ \square$$

REGIÓN NO CONVEXA

Cuando la región a trabajar es una región ABCD no convexa, el teorema sigue siendo igual de válido, la recta que pasa por los puntos medios de las diagonales sigue intersecando a sus 4 lados, al igual que en los casos anteriores, se puede tomar cualquier lado del cuadrilátero como base b para aplicar la fórmula, y desde el punto de corte de la recta de Newton con el lado opuesto[3] se trazaría la perpendicular h a usar.

■ Prueba



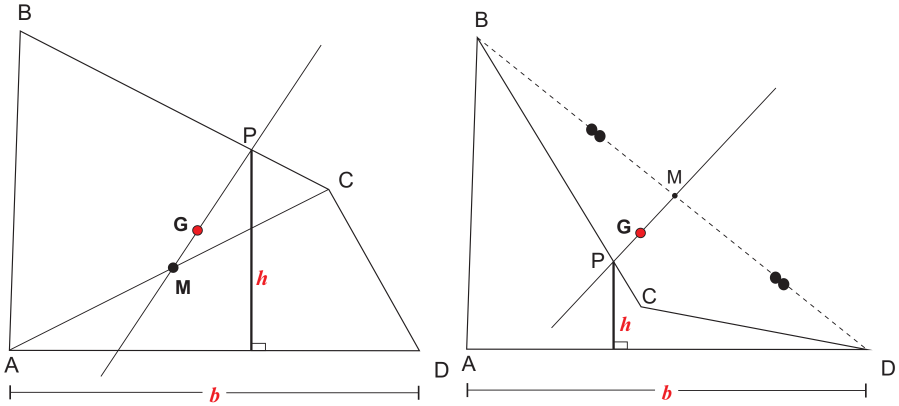
[ABCD] = 2[MBCD] = 2[APD] = bh

Comprobación gráfica del teorema para calcular el área de la región cuadrangular no convexa

A continuación podemos realizar una modificación significativa en el cálculo del área de la región cuadrangular en su forma no trigonométrica, ésta será como sigue:

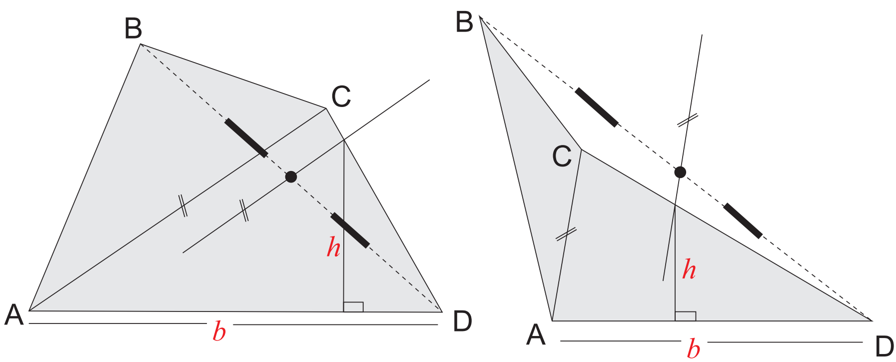
Teorema 3. *El área de Cualquier región cuadrangular es igual al producto de las longitudes de uno de sus lados (b) con la perpendicular (h) trazada hacia dicho lado, desde el punto de intersección del lado opuesto a él, con la recta que pasa por el punto medio de una de sus diagonales y el baricentro del cuadrilátero.*

[3]Lados opuestos: aquellos que no comparten un mismo vértice



$$[ABCD] = b \cdot h$$

Teorema 4. *El área de cualquier región cuadrangular es igual al producto de las longitudes de uno de sus lados con la de la perpendicular hacia dicho lado, trazada desde el punto de corte del la recta que contiene al lado consecutivo a él con la recta que pasa por el punto medio de una diagonal y que es paralela a la otra diagonal.*

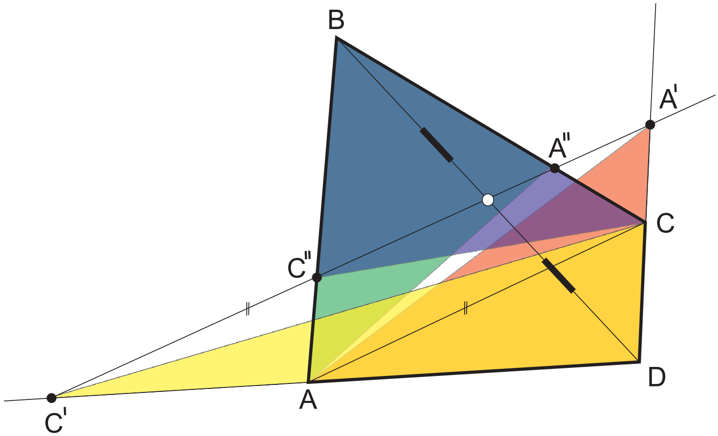


$$[ABCD] = b \cdot h$$

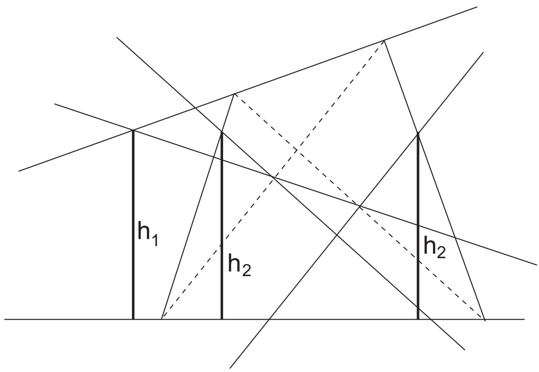
NOTA

La prueba del teorema 5, es bastante simple, si por B trazamos una recta paralela a la diagonal AC y que interseca a la recta DC en P, entonces se prueba rápidamente que $[ABCD] = [APD]$.

En los gráfico siguiente se muestran regiones equivalentes deducidas del teorema anterior y la igualdad de longitudes de algunas perpendiculares.



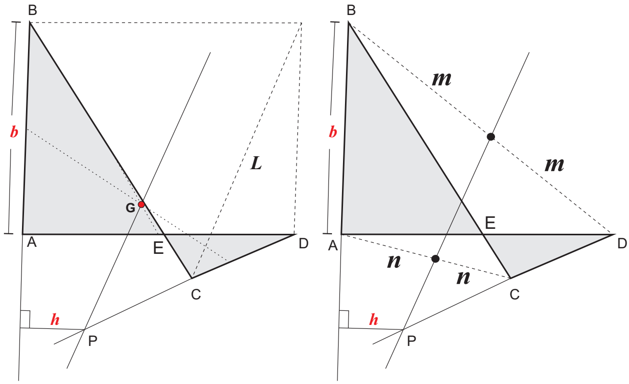
$$[ABA''] = [BCC''] = [DAA'] = [DCC']$$



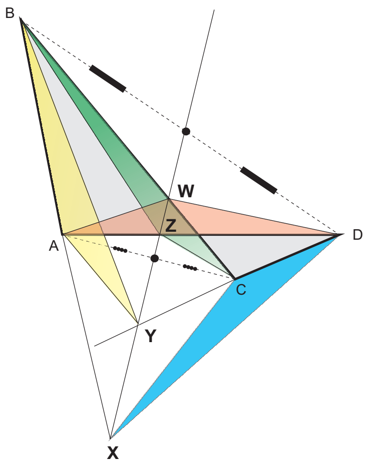
$$h_1 = h_2$$

Esta forma de calcular el área de una región cuadrangular nos a permitido seguir buscando una mayor generalización, que de por sí ya está expresada en el enunciado del teorema 2, con ello se puede demostrar los resultados siguientes (G: Baricentro):

De lo anterior observamos que la fórmula que estamos presentando en este cuadernillo se puede aplicar para una región cuadrangular cruzada[4] pero en ese caso la formula nos arroja la diferencia de las áreas de las regiones triangulares determinadas por el cuadrilátero cruzado, mas no la suma de las áreas de dichas regiones.



$$[ABE]-[ECD]=b\cdot h$$

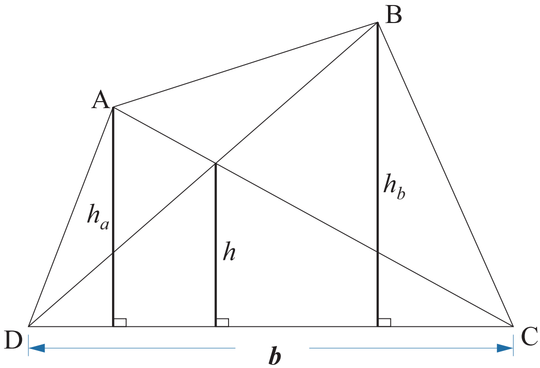


$$[ABY]=[CDX]=[BCZ]=[ADW]$$

[4]Se denomina así cuando el cuadrilátero tiene lados que se intersecan

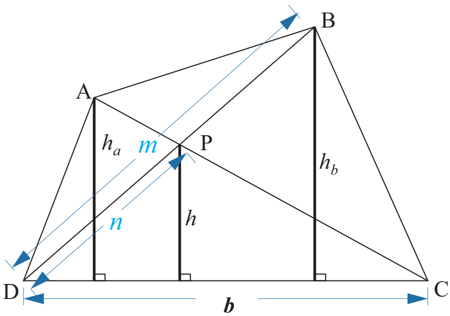
SEGUNDO TEOREMA

Teorema 5. *El área de una región cuadrangular es igual al producto de la longitud de uno de sus lados con las distancias a él desde los vértices opuestos, y todo esto dividido entre el doble de la distancia del punto de intersección de las diagonales hacia el mismo lado.*



$$\boxed{[ABCD] = \frac{b}{2}\left(\frac{h_a h_b}{h}\right)}$$

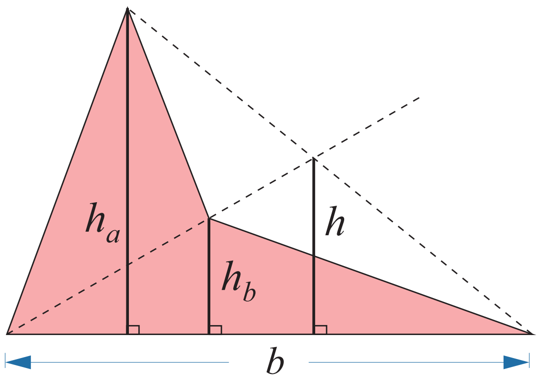
■ Prueba



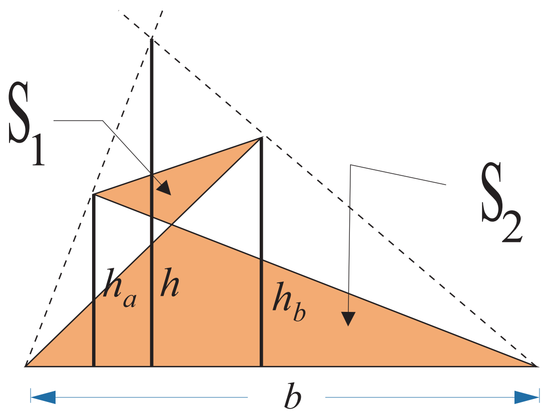
$$\frac{[ABCD]}{[ACD]} = \frac{m}{n} = \frac{h_b}{h}; \text{ además } [ADC] = (b \cdot h_a)/2$$

de allí se sigue que $[ABCD] = \dfrac{bh_a h_b}{2h}$ □

El resultado anterior es válido también para un cuadrilátero que limite una región no convexa o incluso para un cuadrilátero cruzado.

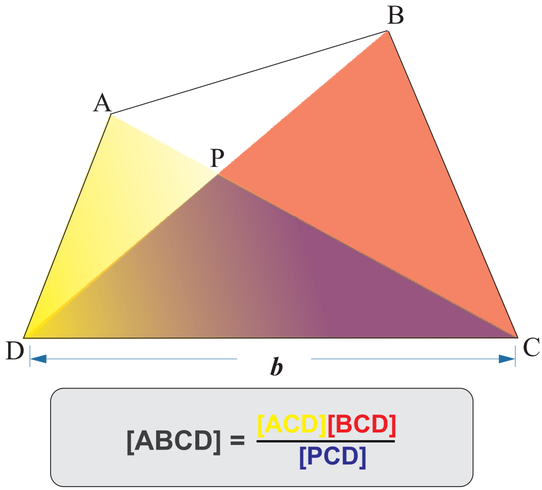


$$[ABCD] = \frac{bh_ah_b}{2h}$$

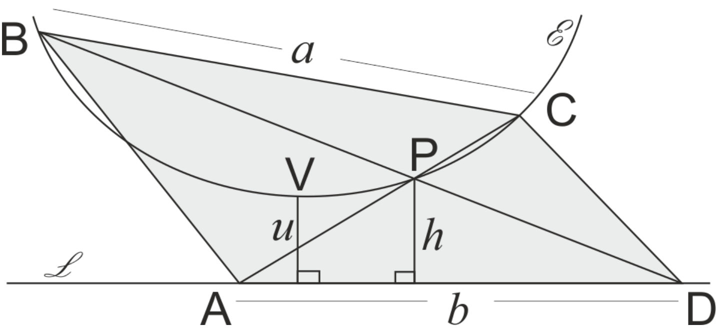


$$S_2 - S_1 = \frac{bh_ah_b}{2h}$$

Otra forma de expresar el teorema 6 es indicándolo mediante una relación de áreas de regiones determinadas en el cuadrilátero por sus diagonales

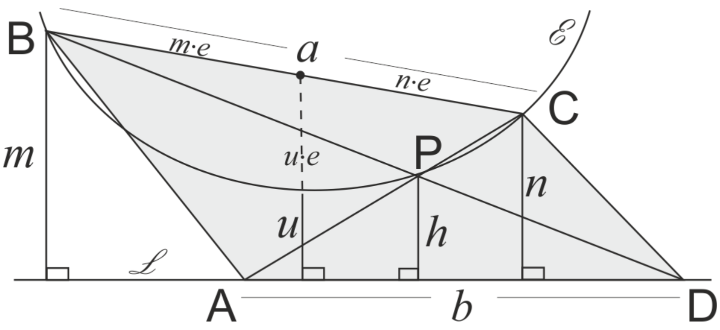


Teorema 6. *Sea $\mathcal{E}$ una cónica de excentricidad e y de directriz $\mathcal{L}$, V es un punto de dicha cónica más cercano a $\mathcal{L}$, de modo que su alejamiento de $\mathcal{L}$ es u. P es un punto de dicha cónica, Por P se trazan dos rectas que intersecan a la cónica y a su directriz determinando un cuadrilátero cuya área de su región se puede calcular en función de los elementos antes señalados y del producto de dos lados opuestos donde uno de ellos es cuerda de la cónica, que contiene al foco.*



$$[ABCD] = \frac{a \cdot b}{4}\left(\frac{i+e}{e}\right)\frac{u}{h}$$

■ **Prueba**



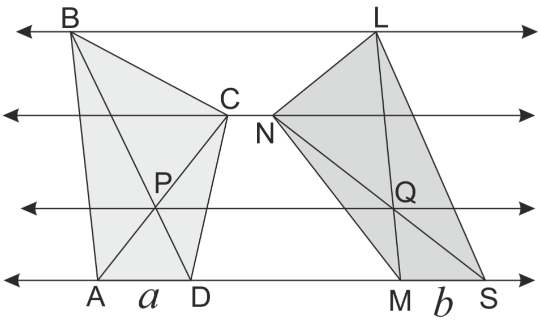
sabemos que:
$[ABCD] = \frac{b}{2}(\frac{mn}{h})$
pero:
$u(1+e) = \frac{2mn}{m+n}$
y como:
$m+n = \frac{a}{e}$
entonces:

$$[ABCD] = \frac{a \cdot b}{4}(\frac{i+e}{e})\frac{u}{h}.$$

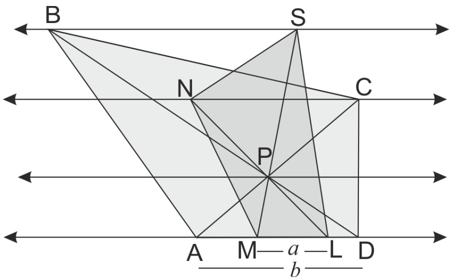
donde:
e: es la excentricidad de la cónica
u: es la distancia del punto V a su directriz.
h: es la distancia del punto P a su directriz.
a: longitud de una cuerda focal □

RAZÓN DE ÁREAS DE REGIONES CUADRANGULARES

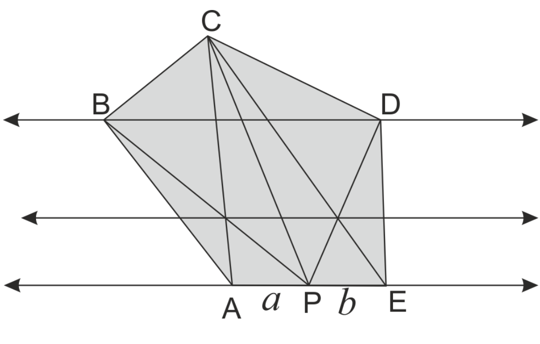
Agregaremos que del teorema en cuestión se puede conseguir la comparación de las áreas de las regiones cuadrangulares cuyos vértices se ubican en rectas paralelas como se muestra en las siguientes ilustraciones.



$$\frac{[ABCD]}{[MNLS]} = \frac{a}{b}$$



$$\frac{[ABCD]}{[MNSL]} = \frac{a}{b}$$

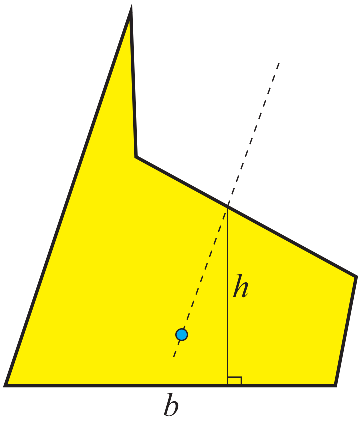


$$\frac{[ABCP]}{[PCDE]} = \frac{a}{b}$$

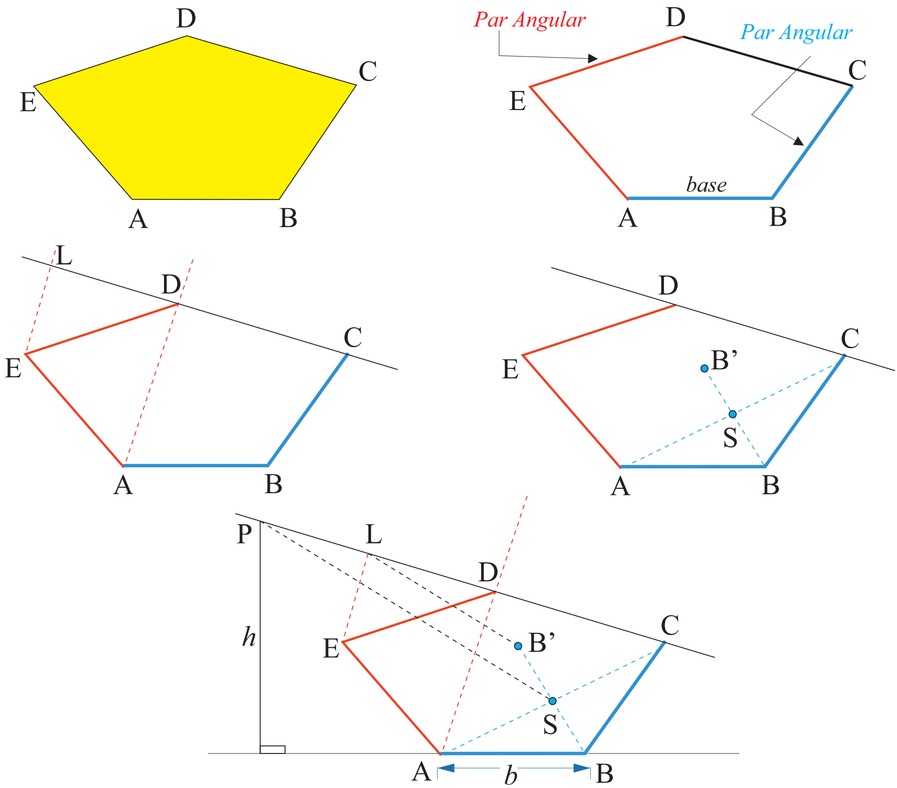
ÁREA DE UNA REGIÓN POLIGONAL

Del Primer Teorema

Es posible obtener el área de una región pentagonal como el producto de un lado por una perpendicular a él ([ABCDE] $= bh$), calculando para ello el área de una región cuadrangular equivalente.



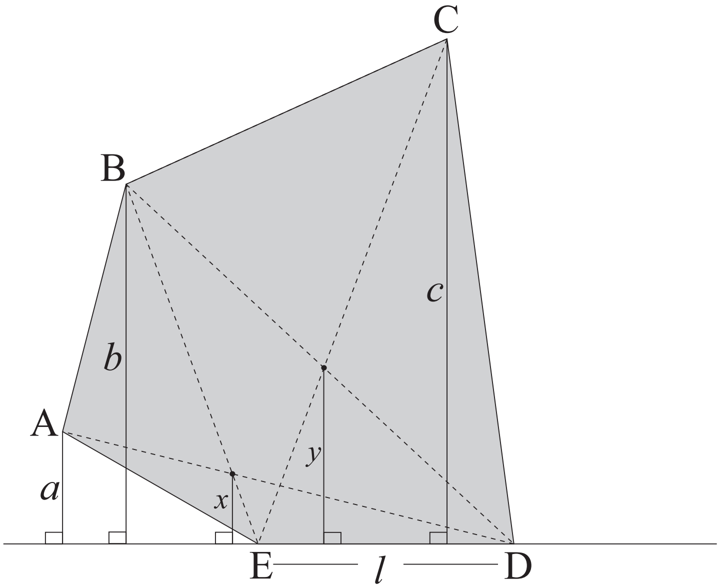
Para tal cálculo seguimos los siguientes pasos (ilustrados en la siguiente figura), Paso 1: escogemos uno de sus lados que servirá como base para el cálculo del área (en el dibujo será AB), en uno de sus extremos (A) consideramos dos pares angualares (AED y ABC) Paso 2: Respecto de uno de los pares angulares (por ejemplo AED) trazamos por su vértice E la paralela al segmento que une sus extremos A y D (dicha paralela será secante a la recta DC en un punto L). Paso 3: Para el otro par angular obtenemos el punto B', simétrico de su vértice B respecto del punto medio S del segmento que determinan sus extremos A y C. Paso 4: Por S trazamos una recta paralela a la dirección dada por LB' que intersecará a la recta DC (lado que no fue considerado) en P. Finalmente el área de la región pentagonal será igual al producto de la base AB con la distancia del punto P hacia AB,



$$[\mathrm{ABCDE}] = b \cdot h$$

Del Segundo Teorema

Teorema 7. *El área de una región* ***Pentagonal*** *es igual a la suma de las áreas de dos regiones cuadrangulares que comparten un mismo lado del pentágono disminuido en la región triangular que es la intersección de las dos regiones cuadrangulares.*



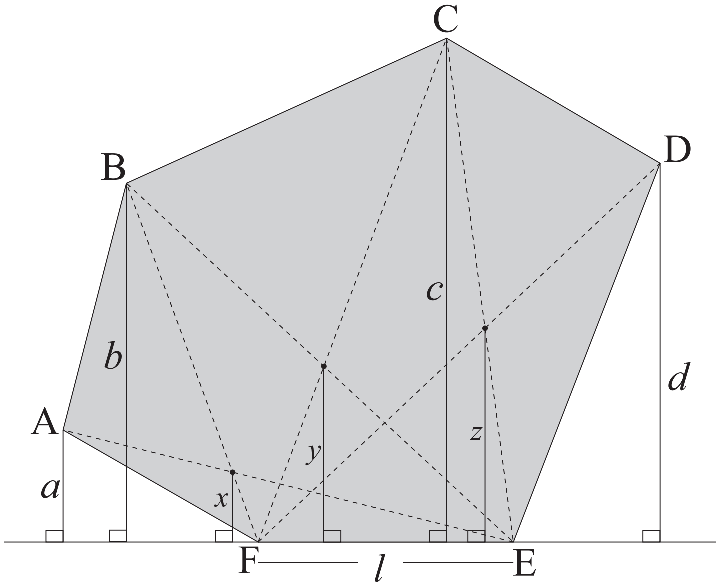
$$[ABCDE] = \frac{l}{2}(\frac{a \cdot b}{x} + \frac{b \cdot c}{y} - b)$$

■ Prueba

$[ABCDE] = [ABDE] + [BCDE] - [BDE]$
Pero sabemos que:
$[ABDE] = (l \cdot a \cdot b)/2x$
$[BCDE] = (l \cdot b \cdot c)/2y$
$[BDE] = (l \cdot b)/2$
Reemplazando:

$$[ABCDE] = \frac{l}{2}(\frac{a \cdot b}{x} + \frac{b \cdot c}{y} - b) \qquad \square$$

Teorema 8. *El área de una región **Hexagonal** es igual a la suma de las áreas de una región pentagonal con una región cuadrangular que comparten un mismo lado del hexágono, disminuido en el área de la región triangular que es la intersección de ambas regiones.*



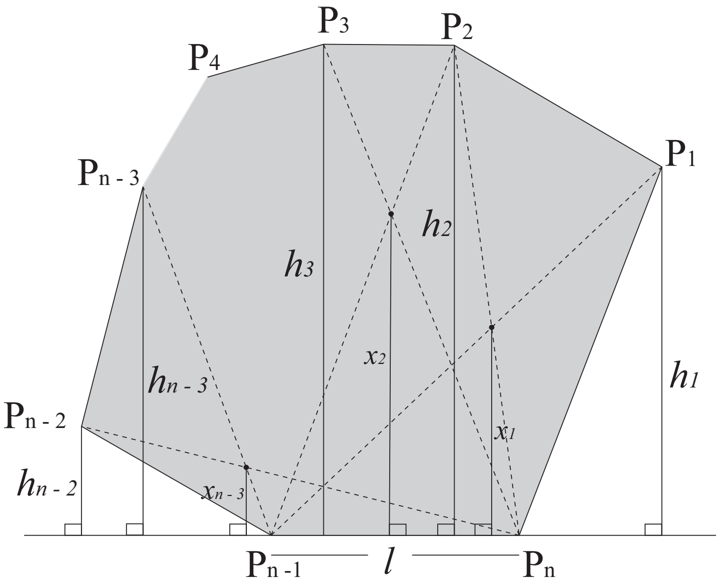
$$[ABCDEF] = \frac{l}{2}(\frac{a \cdot b}{x} + \frac{b \cdot c}{y} + \frac{c \cdot d}{z} - b - c)$$

■ **Prueba**

$[ABCDEF] = [ABEF] + [BCEF] + [CDEF] - [BEF] - [CEF]$
Pero sabemos que:
$[ABEF] = (l \cdot a \cdot b)/2x$
$[BCEF] = (l \cdot b \cdot c)/2y$
$[CDEF] = (l \cdot c \cdot d)/2z$
$[BEF] = (l \cdot b)/2$
$[CEF] = (l \cdot c)/2$
Reemplazando:

$$[ABCDEF] = \frac{l}{2}(\frac{a \cdot b}{x} + \frac{b \cdot c}{y} + \frac{c \cdot d}{z} - b - c) \qquad \square$$

Teorema 9. ***GENERALIZACIÓN****: El área de cualquier región poligonal de n lados, viene dada por la siguiente expresión:*



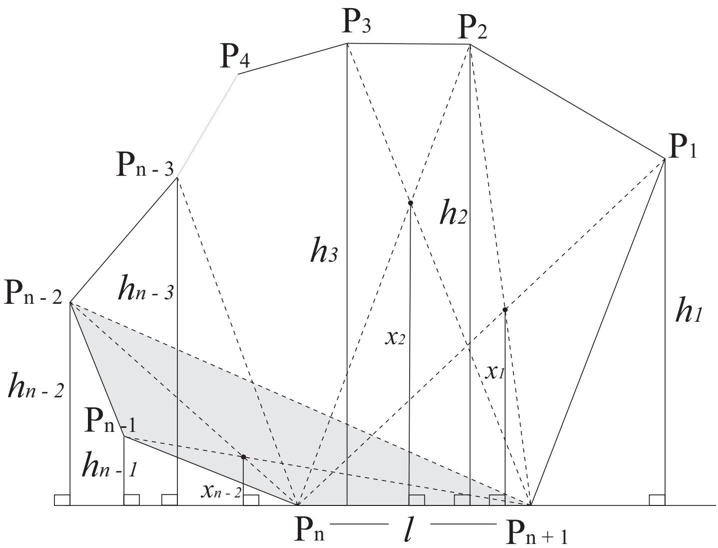
$$[P_1P_2...P_n] = \frac{l}{2}(\frac{h_1 \cdot h_2}{x_1} + \frac{h_2 \cdot h_3}{x_2} + \cdots + \frac{h_{n-3} \cdot h_{n-2}}{x_{n-3}} - h_2 - \cdots - h_{n-3})$$

■ **Prueba**

La demostración de este resultado se puede hacer usando la inducción, para ello sabemos que si n es el número de lados de la región poligonal, el teorema ya ha sido demostrado para n = 4, n = 5, n = 6, supongamos que el teorema es cierto para n lados, usando la figura anterior escribimos que sería cierto que:

$$[P_1P_2...P_n] = \frac{l}{2}(\sum_{i=1}^{n-3} \frac{h_i \cdot h_{i+1}}{x_i} - \sum_{i=2}^{n-3} h_i)$$

Entonces asumiendo que el teorema se cumple para el caso de n lados, probaremos que también se cumple para el caso de n+1 lados, para ello agreguemos un nuevo vértice P_{n+1} y lo mostramos en el siguiente gráfico sombreando únicamente la zona que nos interesa que es por donde aparece el vértice agregado.



Se nota que ahora para calcular el área total, debemos agregar a lo ya calculado el área de la región cuadrangular $P_{n-2}P_{n-1}PnP_{n+1}$ y restarle el área de la región triangular $P_{n-2}P_nP_{n+1}$ es decir:

$$[P_1...P_nP_{n+1}] = \frac{l}{2}(\sum_{i=1}^{n-3}\frac{h_i \cdot h_{i+1}}{x_i} - \sum_{i=2}^{n-3}h_i) + \frac{l \cdot h_{n-2} \cdot h_{n-1}}{x_{n-2}} - \frac{l \cdot h_{n-2}}{2}$$

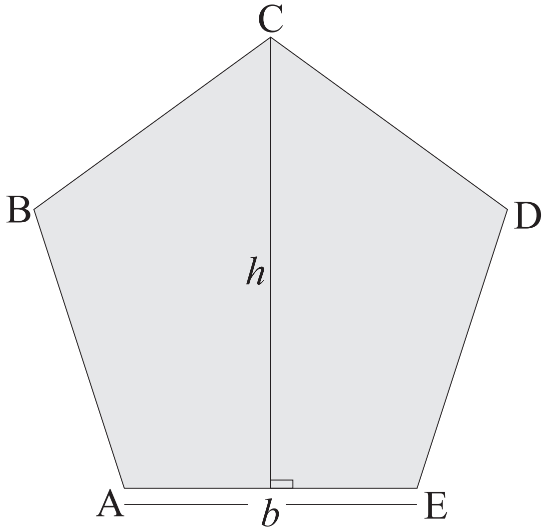
Que equivale a escribir:

$$[P_1P_2...P_{n+1}] == \frac{l}{2}(\sum_{i=1}^{n-2}\frac{h_i \cdot h_{i+1}}{x_i} - \sum_{i=2}^{n-2}h_i)$$

y con lo cual culmina nuestra prueba □

APLICACIÓN

El área de una región pentagonal regular es igual a raiz de 5 multiplicado por semiproducto de la longitud de uno de sus lados con la longitud de la perpendicular trazada desde el vértice opuesto hacia dicho lado.



$$[ABCD] = \frac{b \cdot h \cdot \sqrt{5}}{2}$$

Capítulo 2

PROBLEMAS

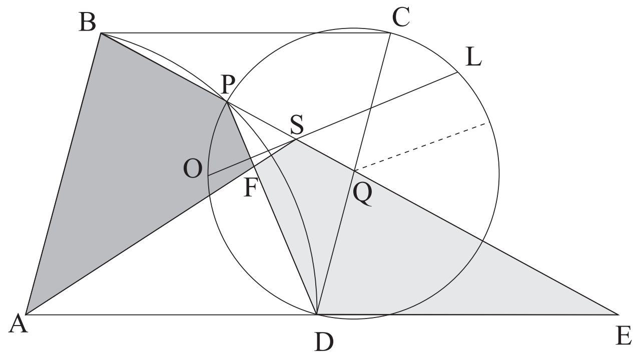
2.1. Primer Teorema

Problema 1. *Se tiene un cuadrado ABCD de centro O, y en su región interior un cuadrante de centro D y radio AD, P es un punto de dicho cuadrante y la recta que pasa por O y es paralela a la recta BP, interseca a $\overline{PC}$ en Q, H es la proyección ortogonal de Q en $\overline{AD}$ si las áreas de las regiones APQ y CDH suman S, Calcule el área de la región APCD.*

Problema 2. *Se tiene un paralelogramo ABCD de centro O, S es un punto de su región interior, de modo que el rectángulo PQRD está inscrito en el cuadrilátero ABSD, con R en $\overline{BS}$ ($\overline{OR} \parallel \overline{SC}$) y P en $\overline{AD}$, Si [QBR] = S_1 y [RSD] = S_2. Calcule [APQ].*

Problema 3. *Se tiene un cuadrante BD de centro A secante a una semicircunferencia de diámetro CD en P, ABCD es un cuadrado, En la prolongación del segmento BP se ubica el punto S de modo que m$\angle$ SDC = 8°, la recta que pasa por S es perpendicular a $\overline{CD}$ en H e interseca a la semicircunferencia CD en E, si ED = a. Calcule el área de la región ABPD.*

Problema 4. *En la figura mostrada ABCD es un rombo de centro O, el arco BD tiene centro en A, y los arcos OP y CL tienen igual medida. Calcule la razón de las áreas de las regiones ABPF y DFSE.*



2.2. Variante del Primer Teorema

Problema 5. *Si en un cuadrilátero $ABCD$, M y N son puntos de intersección de la recta que pasa por los puntos medios de las diagonales (recta de Newton) con los los lados BC y AD respectivamente y $BC = AD$, calcule la comparación entre los valores numéricos de las medidas angulares NMC y MND.*

Problema 6. *Si en un cuadrilátero $ABCD$, $AB = BC = CD$, y M es el punto de intersección de la recta de Newton del cuadrilátero con el lado AD. Si M está en la prolongación del segmento DA entonces la perpendicular trazada por M hacia el lado BC es igual a la diferencia de las distancias desde dicho punto hacia los otros lados del cuadrilátero.*

Problema 7. *La recta de Newton de un cuadrilátero ABCD circunscrito a una circunferencia de radio r interseca a los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DA}$ en D', B', C' y A' respectivamente, sean las distancias desde esos puntos hacia sus respectivos lados opuestos h_d, h_b, h_c y h_a. Pruebe que:* $\dfrac{1}{h_a} + \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c} + \dfrac{1}{h_d} = \dfrac{2}{r}$

Problema 8. *Si M y N son puntos medios de las diagonales de un cuadrilátero $ABCD$, y la recta MN interseca al lado BC en P, siendo la recta CE paralela a la recta PD, con E en la recta AD; si F es un punto en AD de modo que $AF = DE$, entonces $[ABPF] = [PFDC]$.*

Problema 9. ***(Problema de Shariguin)*** *La recta que pasa por los puntos medios de las diagonales AC y BC del cuadrilátero*

$ABCD$ corta a los lados AB y DC respectivamente en los puntos M y N. Demostrar que $[DCM] = [ABN]$.

Problema 10. *La recta que pasa por los puntos medios de las diagonales AC y BD del cuadrilátero $ABCD$ interseca a los lados AB y DC respectivamente en los puntos M y N. Si L es punto medio del segmento MN entonces el área de la región ABL es igual a la cuarta parte del área de la región cuadrangular $ABCD$.*

Problema 11. *Dado un cuadrado $MBLD$, A es un punto en la prolongación de $\overline{DM}$, Q es un punto de $\overline{ML}$ y C un punto en la prolongación de $\overline{AQ}$ de modo que $AQ = QC$, la recta ML interseca al segmento BC en P. Si $m\angle LBC = \theta$ y $AD \cdot BP = K$. Calcule el área de la región $ABCD$.*

Problema 12. *P es un punto en la prolongación del diámetro $\overline{BC}$ de una semicircunferencia y Q un punto en dicha semicircunferencia, de modo que la medida del arco CQ es $37°$, se prolonga el segmento BQ, hasta el punto D, y se ubica el punto A, al mismo lado que D respecto de la recta BP, tal que $m\angle ABP = 90°$, y $AB = BC = CD = 2CP$. Si $[APD] = S$, calcule el área de la región $ABPD$ (considere la aproximación $\tan 26,5° = 1/2$).*

Problema 13. *C es un punto en la prolongación del diámetro $\overline{AB}$ de una semicircunferencia y N un punto en dicha semicircunferencia, se traza $\overline{NH}$ perpendicular a $\overline{AB}$ (H en $\overline{AB}$) de modo que resulta $AH = HC$, luego se contruye el cuadrado $HCDQ$ que pasa por N, S es otro punto de la semicircunferencia tal que los arcos SN y NB miden igual, además las rectas NB y AS se intersecan en M y las rectas MQ y DC se intersecan en P. Conociendo que el área de la región $AMPB$ es S. Calcule el área de la región trapecial $HQDB$.*

Problema 14. *Dado un rectángulo $ABCD$, y un cuadrilátero $ADNM$ donde M está en $\overline{AB}$, de modo que el segmento MN interseca en P al lado $\overline{BC}$, y el segmento ND interseca en Q al lado $\overline{BC}$. Si además se sabe que la recta que pasa por los puntos medios de las diagonales del cuadrilátero $ADNM$ pasa también por P. Demuestre que: $[MBP] + [DCQ] = [QNP]$.*

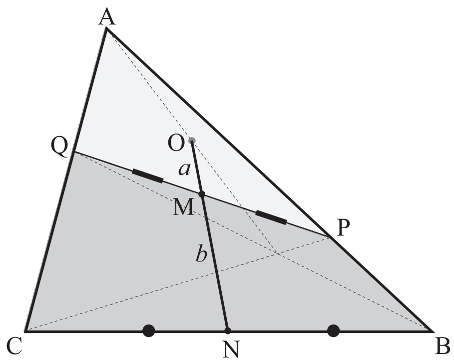
Problema 15. *Dado un rectángulo $ABCD$, Q es un punto de $\overline{BC}$ y P un punto de $\overline{AD}$, de modo que $AP = QC$. N es un punto de $\overline{PQ}$ y F un punto en la prolongación de $\overline{BN}$, si $\overline{PQ} \cap \overline{AF} = \{M\}$ y $AM = MF$ siendo además $\overline{BM} \cap \overline{AN} = \{E\}$. Calcule la razón de las áreas de las regiones $[ABE]$ y $[ENDM]$.*

2.3. Segundo Teorema

Problema 16. *En un triángulo ABC su circunferencia inscrita de centro I tiene radio r, ademas las rectas AI, CI intersecan a los catetos $\overline{BC}$ y $\overline{AB}$ en P y en Q respectivamente, si $AC = b$. Calcule la razón de las áreas de las regiones QBP y $AQPC$.*

Problema 17. [1] *Carlos Olivera Diaz*
Si M y N son los excentros relativos a los catetos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ de un triángulo rectángulo ABC y además I es su incentro. Demuestre que el área de la región pentagonal $AMNCI$ es $\dfrac{AC^2}{2}$.

Problema 18. *En un triángulo ABC, si una recta interseca a los lados $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$ en Q y en P respectivamente, además las rectas CP y BQ se intersecan en K y la recta que pasa por los puntos medios N y M de $\overline{CB}$ y $\overline{PQ}$ respectivamente, interseca a $\overline{AK}$ en O, entonces la razón de las áreas de las regiones que determina dicha recta en el triángulo son entre sí como la razón de longitudes que determina la recta en $\overline{ON}$*



[1]Este problema fue publicado en la revista digital Perú Geométrico

Problema 19. [2] *Thanos Kalogerakis*

Sea P el punto de intersección de los lados $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ de un cuadrilátero $ABCD$, $AB = 2x$, además la suma de las distancias de D y de C hacia $\overline{AB}$ es igual a y; la razón de las distancias desde el punto de intersección de las diagonales y del punto P hacia el lado $\overline{AB}$ es igual a w. Pruebe que el área de la región $ABCD$ es igual a $\dfrac{x \cdot y}{w+1}$

Problema 20. [3] *Thanos Kalogerakis*

En un triángulo ABC ($BC = 2a$), se trazan las cevianas interiores $\overline{CE}$ y $\overline{BD}$ secantes en F y con diámetro $\overline{BC}$ se traza una semicircunferencia que pasa por el punto medio L de $\overline{ED}$, Si K es punto medio de $\overline{AF}$, Calcule la longitud del segmento KT tangente a la semicircunferencia en T, si se sabe además que $BC = 2a$ y $\dfrac{[ABC]}{[BCDE]} = b$.

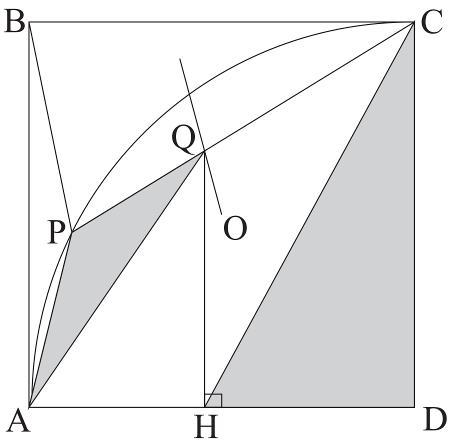
[2] Problema N°3743, publicado en la revista digital Romantics of Geometry
[3] Problema N°3809, publicado en la revista digital Romantics of Geometry

Capítulo 3

SOLUCIONES

3.1. Primer Teorema

Solución 1. ■



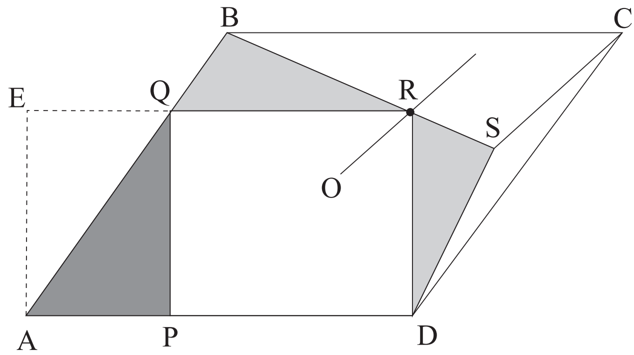
$[APCD] = AD \cdot QH$

$[AQCH] = \dfrac{AC \cdot QH \cdot \sin 45^\circ}{2} = \dfrac{AD \cdot QH}{2} = \dfrac{[APCD]}{2}$

$[APCD] - S = [APCD]/2$

De allí: $[APCD] = 2S$ □

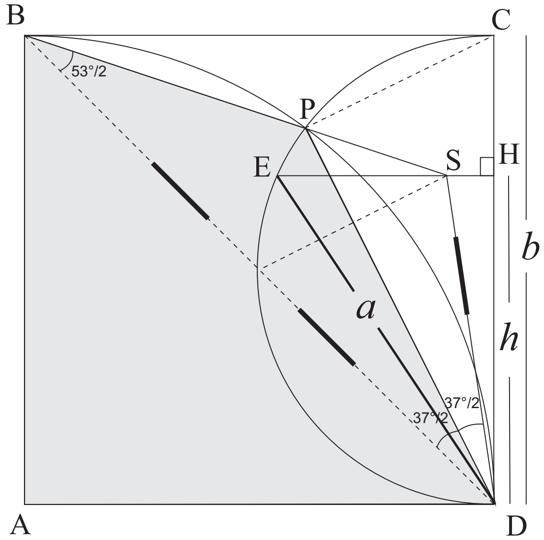
Solución 2. ■



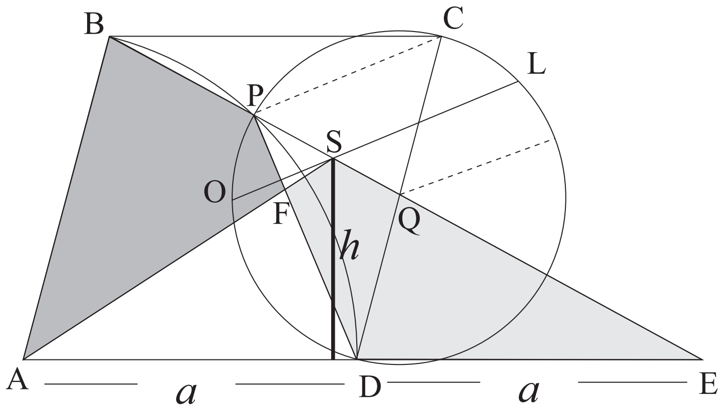
Sabemos del Teorema 1 que:
$[APQ] + [PQRD] + [QBR] + [RDS] = [ABSD] = RD \cdot AD$
Construimos el rectángulo AEQP:
$[AERD] = 2[APQ] + [PQRD] = RD \cdot AD$
De allí:
$2[APQ] + [PQRD] = [APQ] + [PQRD] + [QBR] + [RDS]$
$2[APQ] + [PQRD] = [APQ] + [PQRD] + S_1 + S_2$
Finalmente: $[APQ] = S_1 + S_2$ □

Solución 3. ■

Es conocido que $m\angle PDC = 53°$
como $m\angle SDC = 8°$ *entonces* $m\angle PDS = 37°/2$
Al trazar $\overline{BD}$ *se observa que* $m\angle PDB = 37°/2$
Además $m\angle DBP = 53°/2$
En el triángulo BDS se prueba fácilmente usando los notables que BD = 2DS
Entonces si O es el centro del cuadrado, $\overline{OS}$ *será perpendicular a* $\overline{PD}$ *y por lo tanto* $\overline{OS} \parallel \overline{PC}$
Luego el área [ABPD] será $h \cdot b$*, pero* $a^2 = h \cdot b$
Finalmente: $[ABPD] = a^2$ □



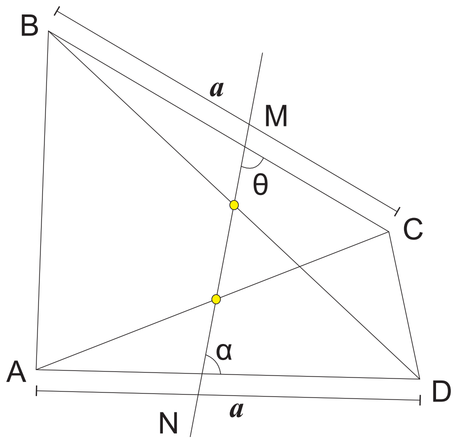
Solución 4. ■



Del dato de los arcos OP y CL de igual medida: $\overline{PC} \parallel \overline{OL}$, *sea* h *la distancia de* S *a* AD *y como* $AD = DE = a$, *luego:*
$[ABPD] = a \cdot h$ *y* $[ASE] = (2a \cdot h)/2$
$[ABPD] = [ASE]$, *entonces:* $[ABPF] = [FDES]$ □

3.2. Variante del Primer Teorema

Solución 5. ■



$$\alpha = \theta$$

$[BNC] = BC \cdot MN \cdot \sin\theta = [ABCD]/2$
$[AMD] = AD \cdot MN \cdot \sin\alpha = [ABCD]/2$
$(BC \cdot MN)\sin\theta = (AD \cdot MN)\sin\alpha$
como $BC = AD$, *Entonces:* $\theta = \alpha$ □

Solución 6. ■

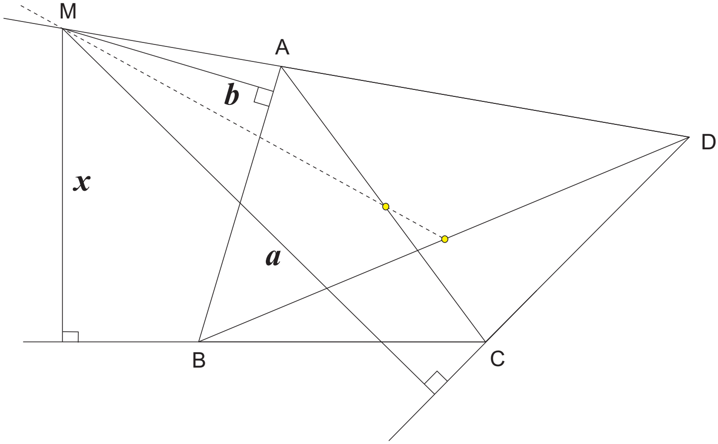
Vemos que: $[ABCD] = [MBCD] - [MBA]$

Es decir: $[ABCD] = [BMC] + [CMD] - [BMA]$

$$x \cdot BC = \frac{x \cdot BC}{2} + \frac{a \cdot CD}{2} - \frac{b \cdot AB}{2}$$

Como $AB = BC = CD$, *entonces:*

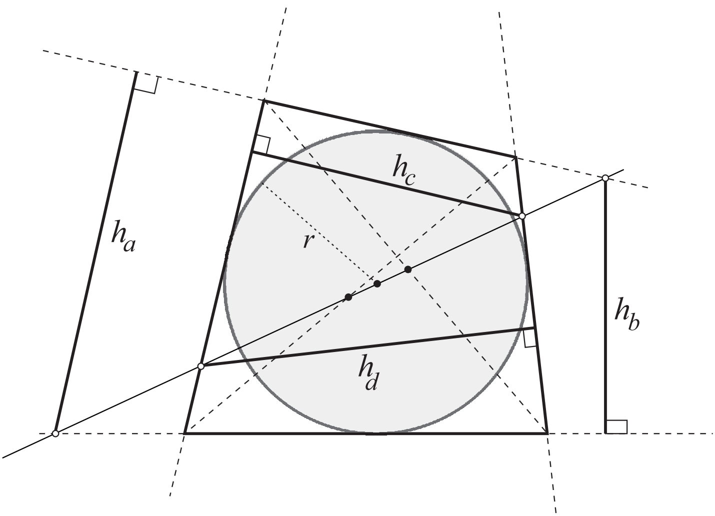
$$x = a - b$$ □



$$x = a - b$$

Solución 7. ■

$[ABCD] = a \cdot h_a = b \cdot h_b = c \cdot h_c = d \cdot h_d = ((a + b + c + d) \cdot r)/2$



$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} + \frac{1}{h_d} = \frac{2}{r}$$

$1/h_a = a/[ABCD]$

$1/h_b = b/[ABCD]$

$1/h_c = c/[ABCD]$

$1/h_d = d/[ABCD]$

Sumando

$\dfrac{1}{h_a} + \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c} = \dfrac{a+b+c+d}{[ABCD]}$

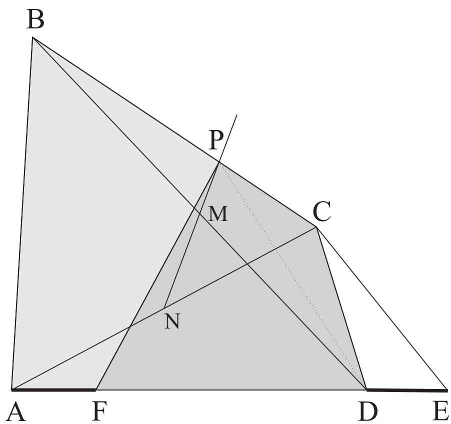
y como $[ABCD] = ((a+b+c+d)\cdot r)/2$

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} + \frac{1}{h_d} = \frac{2}{r} \qquad \square$$

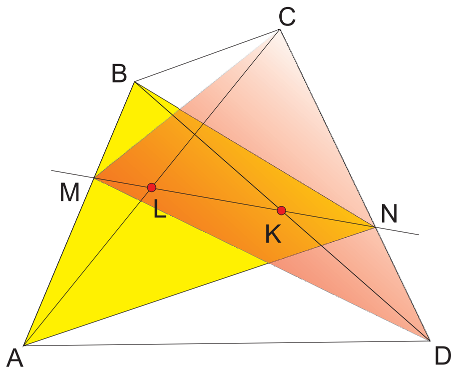
Solución 8. ■

$[BPA] + [PCD] = [APD] = [APF] + [FPD] = [DPE] + [FPD]$

$= [DPC] + [FPD] = [FPCD]$ $\square$



Solución 9. ■

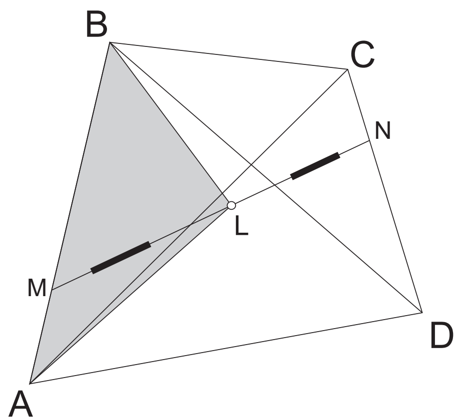


$$[DCM] = [ABN]$$

Prueba (Original)

Solución original del libro Shariguin (Problema II-37 pág. 72)
Supongamos que K *es el punto medio de* DB *y* L *es punto medio de* AC
$[ANM] = [CNM]$ *ya que* $AL = LC$
precisamente de esta manera:
$[BNM] = [DNM]$
de donde se deduce la afirmación □

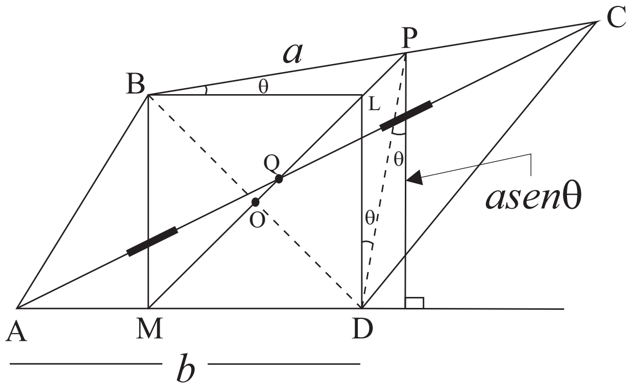
Solución 10. ■



La prueba es inmediata ya que el área de la región ABN es la mitad del área de la región $ABCD$, y como el área de la región ABL es la mitad del área de ABN, entonces se sigue la demostración. $\square$

Solución 11. $\blacksquare$

Al trazar la diagonal $\overline{BD}$ se observa que la recta MP, pasa por los puntos medios de las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ del cuadrilátero ABCD, como PD = PB, entonces la distancia de P a $\overline{AD}$ será $a\sin\theta$

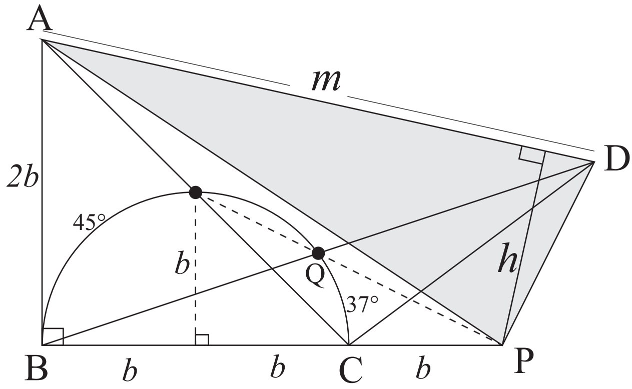


Finalmente el área de la región cuadrangular será $ab\sin\theta$

Solución 12. $\blacksquare$

Como BC = CD y $\overline{CQ} \perp \overline{BD}$ entonces Q es punto medio de $\overline{BD}$, además se prueba fácilmente de los datos que M es punto medio de $\overline{AC}$ y que M, Q y P son colineales.

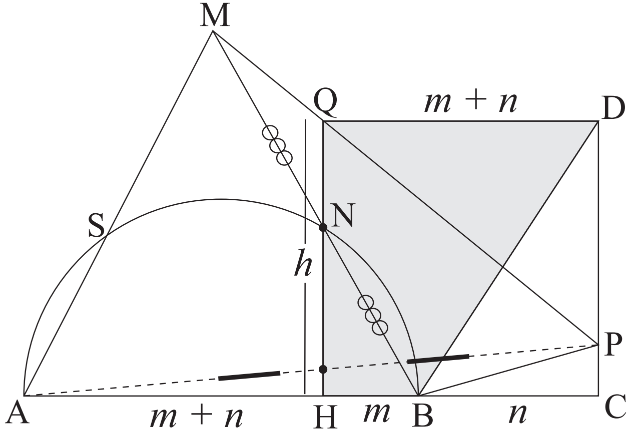
El dato del problema es el área de la región APD igual a $\boldsymbol{S}$, es decir $2\boldsymbol{S} = m \cdot h$, pero el área pedida es el área de la región ABCD que será $m \cdot h$, es decir $2\boldsymbol{S}$



Solución 13. ■

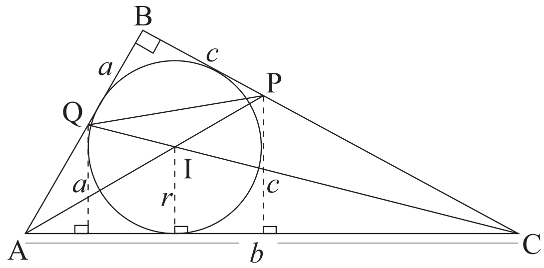
Como $\overline{AB}$ es diámetro de la semicircunferencia mostrada entonces $\overline{AN} \perp \overline{MB}$, además como $m\overset{\frown}{\mathrm{SN}} = m\overset{\frown}{\mathrm{NB}}$, $\overline{AN}$ es bisectriz del ángulo MAB, de allí que N sea punto medio de $\overline{MB}$. En el triángulo APC, $\overline{QH}$ biseca a AP, luego HQ es la recta de Newton del cuadrilátero AMPB, entonces el área de la región AMPB será $AB{\cdot}QH = h \cdot (2m+n) = \boldsymbol{S}$.

Piden el área de la región HBDQ, como es un trapecio, el área de la región que limita se calculará como (HB + QD)QH/2, es decir es igual a $(h \cdot (2m+n))/2 = \boldsymbol{S}/2$.



3.3. Segundo Teorema

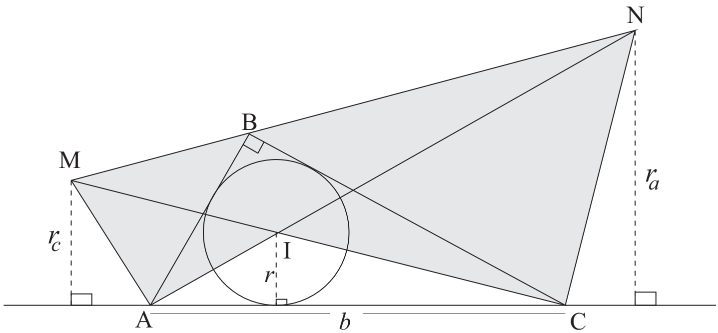
Solución 14. ■



El área de la región QBP es $\dfrac{a\cdot c}{2}$ *y el área de la región cuadrangular AQPC es* $\dfrac{a\cdot b\cdot c}{2\cdot r}$ *de modo que al dividir obtenemos:*

$$\frac{[ABC]}{[AQPC]}=\frac{r}{b}$$

Solución 15. ■



$[AMNCI]=[AMNC]-[AIC]$

$[AMNCI]=\dfrac{b\cdot r_a\cdot r_c}{2r}-\dfrac{b\cdot r}{2}$

Pero se sabe que: $r_a\cdot r_c=p\cdot r$*, donde* p *es el semiperimétro del triángulo, y como* $p-r=b$*, se consigue lo pedido.*

Bibliografía

[1] Eves, Howard, *Estudio de Todas Las Geometrías.* Hispano. Americana: Mexico, 1969

[2] Frére, Gabriel Marie, *Exercises de Geométrie* J. Gigord. París: 1920

[3] L. I. Golovina, I. M. Yaglom, *Inducción en la Geometría* Ed. MIR. Moscú: 1976

[4] Donaire, M., *Formas y Números - La geometría en las Olimpíadas de Matemática.* Universidad de Ciencias y Humanidades. Perú: 2010

[5] Jose Araujo, Guillermo Keilhauer, Norma Pietrocola, Valeri Vavilov, *Area y Volumen en la Geometria Elemental.* Ed. Red Olímpica. Buenos Aires: 2000

[6] Triángulos Cabri (2008 - 2018), *Problema 867.* España: 2018 http://personal.us.es/rbarroso/trian guloscabri/

[7] Coolidge, J. L., *A Historically Interesting Formula for the Area of a Quadrilateral.* Amer. Math. Monthly 46, 345-347, 1939.

[8] Regiomontanus, J. M., *De Triangulis Omnimodis.* 1464.

[9] Carl B. Boyer, *Historia de la Matemática.* John Wiley - Sons, Traducción Ed. Alianza Editorial 1986.

[10] Weisstein, Eric W., *Bretschneider's Formula.* From MathWorld A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/Bret schneidersFormula.html

[11] Titu Andreescu, Luis Gonzales, Cosmin Phoata, *Newton y los puntos medios de las diagonales de un cuadrilátero circunscrito.* Web Resource. https://www.awesomemath.org/wp-pdf-files/math-reflections/mr-2014-01/newton and midpoints.pdf

[12] Weisstein, Eric W., *Léon Anne's Theorem.* From MathWorld A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/ LeonAnnesTheorem.html

[13] I. Shariguin, *Problemas de Geometría - Planimetría.* Editorial Mir: URSS, 1989